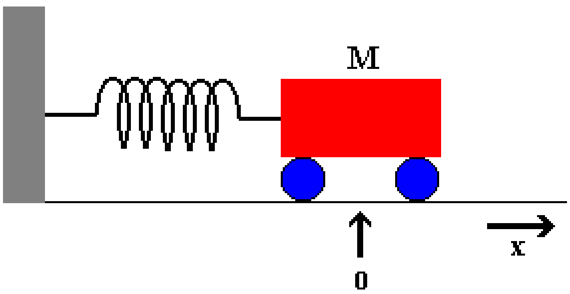
INGENIEURTECHNISCHE ANWENDUNGEN

QuickSheets

Gedämpfte harmonische Schwingung

Dieses QuickSheet zeigt die freien Schwingungen in mechanischen und elektrischen Systemen: Homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Betrachten wir einen Wagen mit der Masse M, der über eine Rückholfederkraft ausübende Feder mit einer Wand verbunden ist: $-k \cdot x$ Der gesamte Aufbau soll sich in einem viskosen Medium befinden, das eine dämpfende Kraft ausübt: $-c \cdot \frac{dx}{d\tau}$.



Der Wagen wird im Gleichgewicht dargestellt (wenn x = 0).

Die Differentialgleichung für dieses mechanische System lautet:

$$M \cdot \frac{d^2}{d\tau^2}x(\tau) + c \cdot \frac{d}{d\tau}x(\tau) + k \cdot x(\tau) = 0$$

$$x(0) = x_0 \qquad \frac{d}{dx}x(\tau) = 0 \qquad \text{bei } \tau = 0.$$

Geben Sie Parameterwerte ein:

$M := 1$ $\quad$ $k := 1$

$x_0 := 1$ $\quad$ $c := 2$

Transformation in die Standardform:

$$a := \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad b := \frac{c}{2 \cdot M}$$

Richten Sie den Lösungsblock für gewöhnliche Differentialgleichungen ein:

$Te := 6$ Endpunkt ganz rechts

$Nt := 10$ Anzahl der Zeitschritte

Vorgabe

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x(\tau) + 2 \cdot b \cdot \frac{d}{d\tau}x(\tau) + a^2 \cdot x(\tau) = 0$$

$$x(0) = x_0 \quad x'(0) = 0$$

$$disp := \text{Gdglösen}(\tau, Te)$$

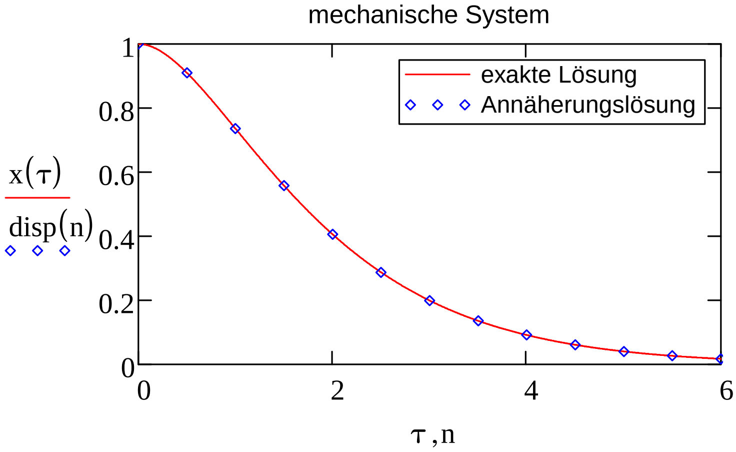
Der Löser für steife Systeme wurde durch einen Klick mit der rechten Maustaste auf **Gdglösen** ausgewählt, da es die für dieses System etwas besseren Ergebnisse liefert.

Exakte Lösung:

$$m_1 := -b + \sqrt{b^2 - a^2} \qquad m_2 := -b - \sqrt{b^2 - a^2}$$

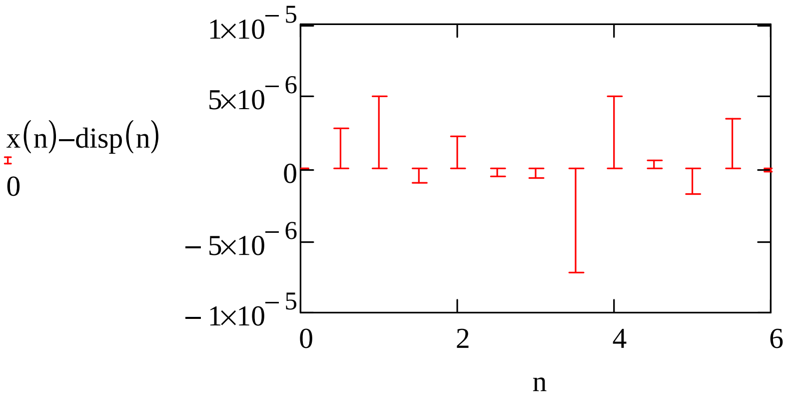
$$x(\tau) := \text{wenn}\left[b = a, x_0 \cdot e^{-a \cdot \tau} \cdot (1 + a \cdot \tau), \frac{x_0}{m_1 - m_2} \cdot \left(m_1 \cdot e^{m_2 \cdot \tau} - m_2 \cdot e^{m_1 \cdot \tau}\right)\right]$$

$n := 0, 0.5 .. Te$



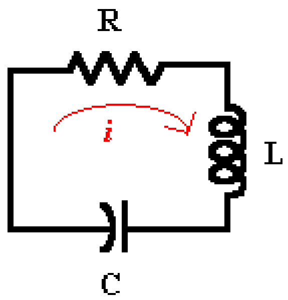
Betrachten wir den Fehler in der Lösung

$$\sum_n (x(n) - disp(n))^2 = 1.324 \cdot 10^{-10}$$



Anwendung auf Schaltkreise

Gegeben sei ein einfacher elektrischer Schaltkreis mit einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator. Die Ladung Q am Kondensator wird durch die Differentialgleichung modelliert:



$$L \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} Q(\tau) + R \cdot \frac{d}{dt} Q(\tau) + \frac{1}{C} \cdot Q(\tau) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} Q(\tau) = 0 \quad \text{bei } \tau = 0. \quad Q(0) = Q_0$$

Geben Sie Parameterwerte ein:

$L1 := 1$ $\quad C1 := 0.01$

$Q_0 := 1$ $\quad R1 := 1$

Transformation in die Standardform:

$$a := \sqrt{\frac{1}{L1 \cdot C1}} \qquad b := \frac{R1}{2 \cdot L1}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} Q(\tau) + 2 \cdot b \cdot \frac{d}{d\tau} Q(\tau) + a^2 \cdot Q(\tau) = 0$$

Symbolische Lösung:

$$m_1 := -b + \sqrt{b^2 - a^2} \qquad m_2 := -b - \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$Q(\tau) := \text{wenn}\left[b = a, Q_0 \cdot e^{-a \cdot \tau} \cdot (1 + a \cdot \tau), \frac{Q_0}{m_1 - m_2} \cdot \left(m_1 \cdot e^{m_2 \cdot \tau} - m_2 \cdot e^{m_1 \cdot \tau}\right)\right]$$

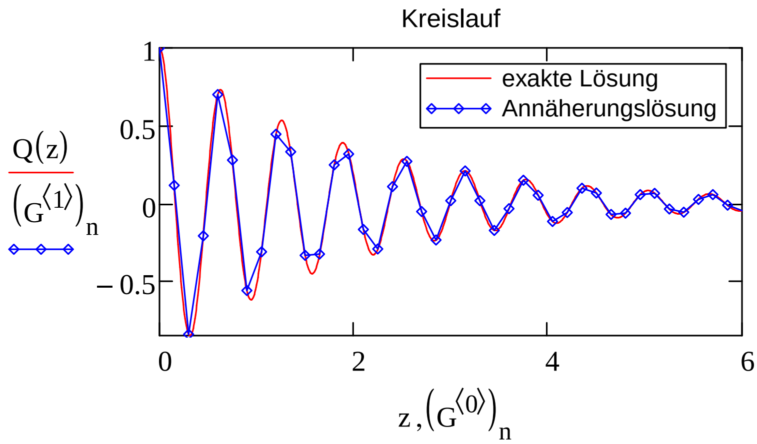
Ein Vergleich mit dem Befehlszeilenlöser für gewöhnliche Differentialgleichungen führt zur selben Lösung:

$$D(\tau, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ -2 \cdot b \cdot X_1 - a^2 \cdot X_0 \end{pmatrix} \quad Nt := 40$$ Anzahl der Zeitschritte

$$G := \mathrm{Bulstoer}\left[\begin{pmatrix} Q_0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, Te, Nt, D\right]$$

Die Funktion **Bulstoer** kann für glatte Systeme ein wenig genauer sein als **rkfest**.

$n := 0, 1 .. Nt$



Interessant ist auch ein Vergleich des Fehlers bei Verwendugg von **rkfest** sowie **Bulstoer** oder **Radau**. Probieren Sie durch eine Änderung in der obigen Lösungsfunktion eine neue Berechnung aufzustellen.

$$\sum_{n} \left[Q\left[\left(G^{\langle 0 \rangle}\right)_n\right] - \left(G^{\langle 1 \rangle}\right)_n \right]^2 = 1.45 \cdot 10^{-7}$$